

Modélisation et Analyse mathématique en films minces :

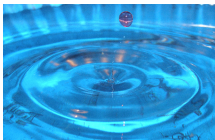
fluides visco-élastiques, rugosités, surfaces libres,
mélanges et fluides compressibles

Laurent Chupin

Institut Camille Jordan - INSA de Lyon

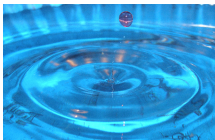
1^{er} décembre 2009

- Equations de Navier-Stokes



$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div}(2\eta D(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

- Equations de Navier-Stokes



$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div}(2(1-r)\eta D(\mathbf{u})) = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

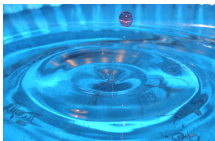
- Comportement visco-élastique : modèle d'Oldroyd



$$\lambda \left(\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + g(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \right) + \boldsymbol{\tau} = 2\eta r D(\mathbf{u})$$

Modèles d'écoulements

- Equations de Navier-Stokes



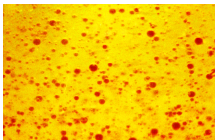
$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div} (2(1-r(\varphi))\eta(\varphi)D(\mathbf{u})) = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mu \nabla \varphi$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

- Comportement visco-élastique : modèle d'Oldroyd



$$\lambda(\varphi) \left(\partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + g(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \right) + \boldsymbol{\tau} = 2\eta(\varphi)r(\varphi)D(\mathbf{u})$$

- Ecoulement diphasique à interface diffuse : modèle de Cahn-Hilliard



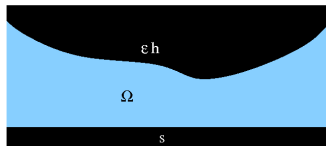
$$\partial_t \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \operatorname{div} (B(\varphi) \nabla \mu) = 0$$
$$\mu = -\alpha^2 \Delta \varphi + F'(\varphi)$$

Partie I - Présentation du contexte et axes de recherche

Partie II - Exemples de résultats obtenus

Contexte : lubrification et équation de Reynolds

- Domaine mince : $\Omega_\varepsilon = \{(x, z) \in \mathbb{R}^d ; x \in \omega \text{ et } 0 < z < \varepsilon h(x)\}$



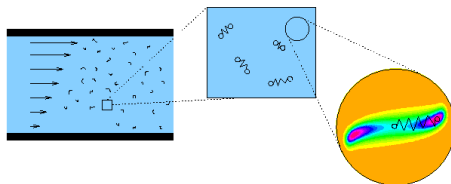
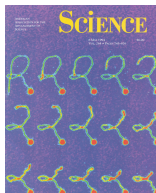
$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - \eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \partial_z p = 0 \\ \operatorname{div}_x \left(\frac{h^3}{12\eta} \nabla_x p \right) = \operatorname{div}_x \left(\frac{h}{2} s \right) \\ \mathbf{u} = \text{fonction explicite de } p \end{cases}$$

- Premières justifications rigoureuses [Bayada, Chambat - 1986]
- Nombreuses généralisations (fluides quasi-newtoniens...)

1) Rhéologie des polymères

- Fluides réels : modèles “complexes”

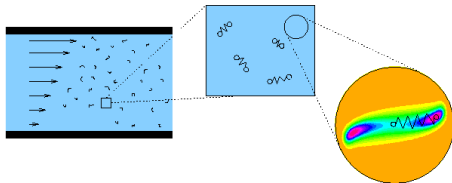
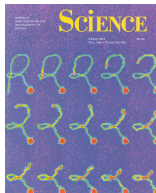
Exemple des modèles Oldroyd et FENE : $\boldsymbol{\sigma} = 2(1 - r)\eta D(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}$



1) Rhéologie des polymères

- Fluides réels : modèles “complexes”

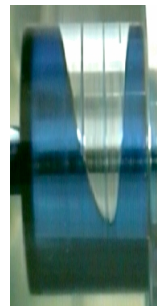
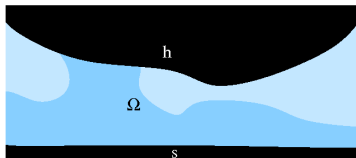
Exemple des modèles Oldroyd et FENE : $\sigma = 2(1 - r)\eta D(\mathbf{u}) + \tau$



- Co-encadrement de la thèse de Bérénice Grec : étude du modèle d'Oldroyd dans des domaines minces.
- Applications à la plasturgie : GRPP, BQR micro-rhéologie des polymères [C. Barrès, Y. Beraux, L. Palade]

2) Fluides complexes

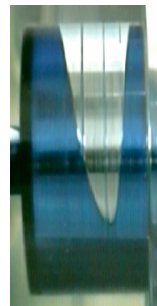
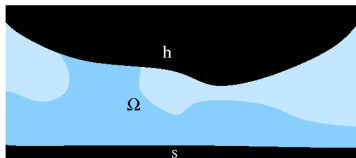
- Ecoulements diphasiques et films minces : comment se comporte un modèle d'interface diffuse en film mince ?



- Fluides compressibles : comment utiliser les résultats récents concernant les équations de Navier-Stokes compressible ?

2) Fluides complexes

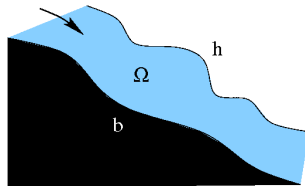
- Ecoulements diphasiques et films minces : comment se comporte un modèle d'interface diffuse en film mince ?
- → Thèse de Bérénice Grec : étude du modèle de Cahn-Hilliard dans des domaines minces.



- Fluides compressibles : comment utiliser les résultats récents concernant les équations de Navier-Stokes compressible ? [D. Bresch, R. Sart]

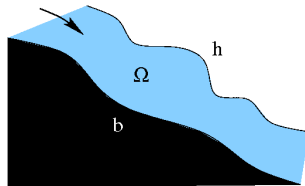
3) Ecoulements à surface libre

- Ecoulement à surface libre : équations sur h et $v = \int_b^h u$
Equations de Saint Venant, effets dus à la topographie.



3) Ecoulements à surface libre

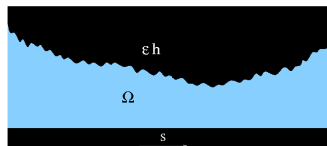
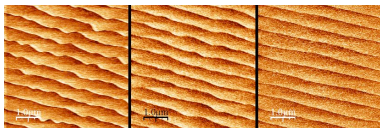
- Ecoulement à surface libre : équations sur h et $v = \int_b^h u$
Equations de Saint Venant, effets dus à la topographie.
[M. Bountounet, P. Noble, J.-P. Vila]



- → ANR SWECF : fluides complexes en eaux peu profondes.

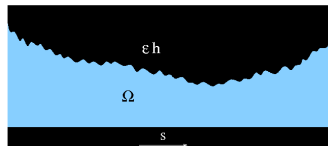
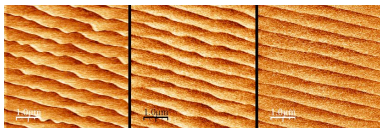
4) Effets des rugosités

- Effets dus aux rugosités $h_\varepsilon(x) = \varepsilon h(x) + \varepsilon^2 H\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$
Convergence double échelle, homogénéisation, correcteurs.



4) Effets des rugosités

- Effets dus aux rugosités $h_\varepsilon(x) = \varepsilon h(x) + \varepsilon^2 H\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$
Convergence double échelle, homogénéisation, correcteurs.
[D. Bresch, C. Choquet, T. Colin, M. Gisclon, S. Martin]



- → ANR RUGO : estimations d'erreur, rugosités non périodiques.

Thèmes de recherche

① Thèse : Mélanges de fluides visco-élastiques

[DCDS-2003], [Adv.Diff.Equ.-2004], [Eur.J.Mech.-2004 F. Boyer, P. Fabrie], [Appl.Math.Letters-2004]

② Fluides visco-élastiques et films minces

[Quat.Appl.Math.-2007 G. Bayada, S. Martin], [Asym.Anal.-2009 G. Bayada, B. Grec],

③ Modèles micro-macros et équation de Fokker-Planck

[CRAS-2009], [Meth.Appl.Anal.-2009], [Ann.Instit.Four.-2009]

④ Phénomènes de rugosité dans des films minces

[soumis D. Bresch, C. Choquet, T. Colin, M. Gisclo], [soumis S. Martin]

⑤ Influence de la topographie sur les modèles de Saint Venant

[Commun.Math.Sci.-2008 M. Bountounet, P. Noble, J.-P. Vila]

⑥ Singularités dans des écoulements minces de type Bingham

[Phys.Let.A-2008 L. I. Palade]

⑦ Ecoulements diphasiques et films minces

[Adv.Math.Flui.Mech.-2008 G. Bayada, B. Grec], [soumis G. Bayada, B. Grec]

⑧ Equation de Reynolds compressible

[soumis R. Sart]

Partie I - Présentation du contexte et axes de recherche

Partie II - Exemples de résultats obtenus

- 1 - Modèle d'Oldroyd en film mince
- 2 - Loi de comportement FENE en film mince
- 3 - Fluide compressible en film mince

Partie I - Présentation du contexte et axes de recherche

Partie II - Exemples de résultats obtenus

- 1 - Modèle d'Oldroyd en film mince
- 2 - Loi de comportement FENE en film mince
- 3 - Fluide compressible en film mince

- **Modèle d'Oldroyd** [Guillopé, Lions, Masmoudi, Renardy, Saut]

$$\mathcal{P}_\varepsilon \begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - (1-r)\eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_\varepsilon \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \\ \lambda \left(\partial_t \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + g(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\tau}_\varepsilon) \right) + \boldsymbol{\tau}_\varepsilon = 2\eta r D(\mathbf{u}_\varepsilon) \end{cases}$$

- **Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$** [Bellout, Tichy] (adimensionnement $\lambda \approx \varepsilon$)

$$\mathcal{P} \begin{cases} -\eta(1-r) \partial_{zz}^2 u - \partial_z \beta + \nabla_x p = 0 \\ \partial_z p = 0 \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2}$$

→ **Pas d'équation simple en pression**

Résultats théoriques

Théorème (G. Bayada, L.C., S. Martin - 2007)

Si $r < 8/9$ alors le problème $\mathcal{P}$ admet une unique solution faible.

Remarque : Exemples de non unicité pour $r \geq 8/9$.

Théorème (G. Bayada, L.C., S. Martin - 2007)

Si u est une solution faible et si $u \in H^1(\Omega)$ alors il existe une unique pression $p \in H^1(\omega)$ telle que (u, p) est l'unique solution forte.

Théorème (G. Bayada, L.C., B. Grec - 2009)

Si $r < 2/9$ et si u est assez petit alors la solution du problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ converge vers la solution du problème $\mathcal{P}$ lorsque ε tend vers 0.

- Problème fort

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\partial_{zz}^2 u + \nabla_x p - \partial_z \left(\frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2} \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h u(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\ u = s \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad p = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h u(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = q_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q) \end{array} \right.$$

- Problème fort

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\partial_{zz}^2 u + \nabla_x p - \partial_z \left(\frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2} \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h u(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\ u = s \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad p = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h u(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = q_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q) \end{array} \right.$$

- Problème faible posé dans

$$K(s, q_0) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \quad \partial_z \varphi \in L^2(\Omega), \quad \varphi = s \text{ dans } L^2(\Gamma), \right. \\ \left. \forall \theta \in \mathcal{D}(\bar{\omega}); \theta|_{\partial\omega^p} = \zeta \in \mathbb{R}, \quad \iint_{\omega} \nabla_x \theta \cdot \left(\int_0^h \varphi(\cdot, z) dz \right) = \int_{\partial\omega^q} (\theta - \zeta) q_0 \right\}$$

- Problème fort

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r) \partial_{zz}^2 u + \nabla_x p - \partial_z \left(\frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2} \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h u(\cdot, z) dz \right) = 0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \\ u = s \quad \text{dans } L^2(\Gamma), \quad p = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^p) \\ \int_0^h u(\cdot, z) dz \cdot \mathbf{n} = q_0 \quad \text{dans } L^2(\partial\omega^q) \end{array} \right.$$

- Problème faible posé dans

$$K(s, q_0) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \quad \partial_z \varphi \in L^2(\Omega), \quad \varphi = s \text{ dans } L^2(\Gamma), \right. \\ \left. \forall \theta \in \mathcal{D}(\bar{\omega}); \theta|_{\partial\omega^p} = \zeta \in \mathbb{R}, \quad \iint_{\omega} \nabla_x \theta \cdot \left(\int_0^h \varphi(\cdot, z) dz \right) = \int_{\partial\omega^q} (\theta - \zeta) q_0 \right\}$$

- Opérateur borné, coercif et monotone lorsque $r < 8/9$.



- Modèle continu pour un écoulement mince newtonien

$$\begin{cases} -\eta \partial_{zz}^2 \mathbf{u} + \nabla_x p = 0 \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}(\cdot, z) dz \right) = 0 \end{cases}$$

- Modèle semi-discretisé et méthode de point fixe d'Uzawa

$$(\mathcal{P}^k) \quad \begin{cases} -\eta \partial_{zz}^2 \left(\mathbf{U}^{k+1}(z) \right) + \mathbf{A} \circ P^k = 0 \\ P^{k+1} - P^k + \rho \mathbf{B} \circ \left(\widetilde{H\mathbf{U}}^{k+1} \right) = 0 \end{cases}$$

- Test d'arrêt sur $P^{k+1} - P^k$ et sur $\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k$

Théorème (G. Bayada, L.C., S. Martin - 2007)

Si $0 < \rho < \frac{3\eta}{2\|h\|_{L^\infty(\omega)}^3 \left(\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} \right)}$ alors la suite de problèmes $(\mathcal{P}^k)$ admet des solutions telles que

$$(\mathbf{U}^k, P^k) \in \left(\prod_{ij} H^1(]0, h_{ij}[) \right) \times \mathbb{R}^{N_{x_1} \times N_{x_2}}.$$

La suite $(\mathbf{U}^k, P^k)$ converge vers la solution du problème continu.

Schéma numérique : cas visco-élastique

- Modèle non linéaire pour un écoulement mince visco-élastique

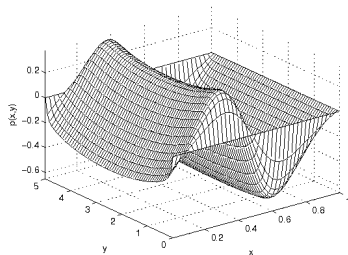
$$\begin{cases} -\eta(1-r)\partial_{zz}^2 u + \nabla_x p - \partial_z \left(\frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2} \right) = 0 \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h u(\cdot, z) dz \right) = 0 \end{cases}$$

- Méthode de point fixe pour linéariser

$$\begin{cases} -\partial_z (f(\mathbf{u}^n) \partial_z \mathbf{u}^{n+1}) + \nabla_x p^{n+1} = 0 \\ \operatorname{div}_x \left(\int_0^h \mathbf{u}^{n+1}(\cdot, z) dz \right) = 0 \end{cases}$$

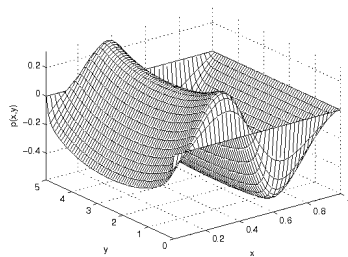
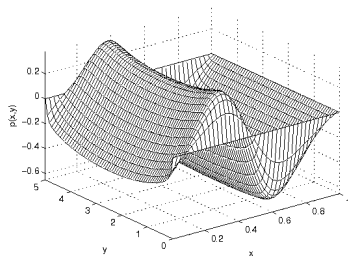
avec

$$f(\mathbf{u}^n) = \eta(1-r) + \frac{\eta r}{1 + C^2 |\partial_z \mathbf{u}^n|^2}$$



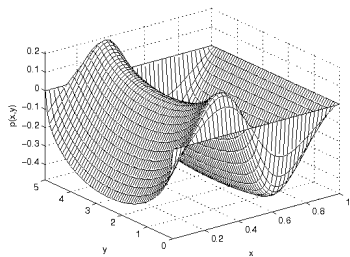
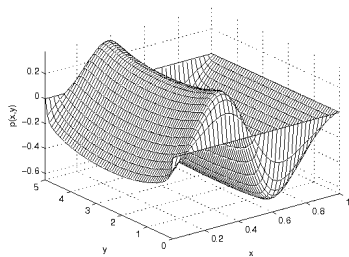
Profil de pression dans le cas Newtonien ($r = 0$)

Effets tridimensionnels



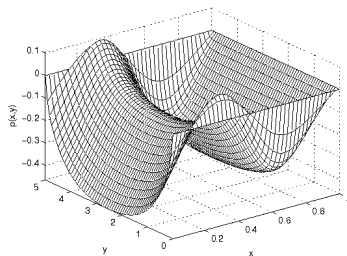
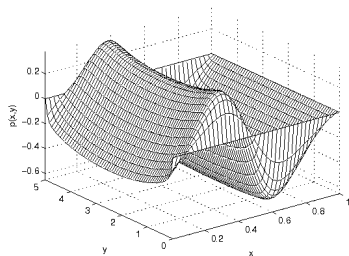
Comparatif des profils de pression ($r = 0$ et $r = 0.2$)

Effets tridimensionnels



Comparatif des profils de pression ($r = 0$ et $r = 0.5$)

Effets tridimensionnels



Comparatif des profils de pression ($r = 0$ et $r = 0.8$)

Partie I - Présentation du contexte et axes de recherche

Partie II - Exemples de résultats obtenus

- 1 - Modèle d'Oldroyd en film mince
- 2 - Loi de comportement FENE en film mince
- 3 - Fluide compressible en film mince

Modèle FENE [Barrett, Lelièvre, Lions, Masmoudi, Renardy, Zhang]

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - (1-r)\eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_\varepsilon \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \\ \boldsymbol{\tau}_\varepsilon = r \int \mathbf{E}(\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q} \psi_\varepsilon(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{Q}}{1 - \|\mathbf{Q}\|^2/Q_0^2} \\ \partial_t \psi_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \psi_\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \Delta_{\mathbf{Q}} \psi_\varepsilon - \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}((\nabla \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{Q}) \psi_\varepsilon) + \frac{1}{\lambda} \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E} \psi_\varepsilon) \end{array} \right.$$

Remarques :

- Lorsque $\mathbf{E}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$ on retrouve le modèle d'Oldroyd.
- Adimensionnement : $\nabla \mathbf{u}_\varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon}$ et $\lambda \approx \varepsilon$.

Modèle FENE : loi constitutive

- Distribution ψ_ε pour un domaine d'épaisseur $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{P}_\varepsilon \begin{cases} \varepsilon (\partial_t \psi_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \psi_\varepsilon) = \Delta_{\mathbf{Q}} \psi_\varepsilon - \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}((\boldsymbol{\kappa} + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \psi_\varepsilon) + \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E} \psi_\varepsilon) \\ \psi^\varepsilon(0, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \psi_{\text{init}}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) \end{cases}$$

- Distribution ψ correspondant au cas $\varepsilon = 0$:

$$\mathcal{P} \begin{cases} 0 = \Delta_{\mathbf{Q}} \psi - \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\kappa} \psi) + \operatorname{div}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{E} \psi) \\ \int_B \psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_B \psi_{\text{init}}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) d\mathbf{Q} \end{cases}$$

Remarque : Equation du type $0 = \Delta \psi - \operatorname{div}(\mathbf{F} \psi)$ [Droniou, Hérau, Noarov, Zeeman]

Théorème (L.C. - 2009)

Le problème $\mathcal{P}$ admet une unique solution faible.

Théorème (L.C. - 2009)

La solution ψ du problème $\mathcal{P}$ approche les solutions ψ_ε du problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ au sens suivant

$$\psi_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) + \tilde{\psi}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{Q}\right) + \varepsilon \Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{Q})$$

Pour des petites valeurs de $\kappa = Q_0 \nabla \mathbf{u}_0$, on a $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{\psi}(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{Q}) = 0$.

Résultat d'existence et d'unicité

Théorème (L.C. - 2009)

Soit B un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Si $f \in H_M^{-1}$ et $\mathbf{F} = \kappa + \nabla V$ avec

- $\kappa \in L^\infty(B)$,
- $V \in C^\infty(B)$, $V = -\infty$ sur ∂B ,
- V satisfait $\mathcal{H}$ près du bord

alors il existe une unique solution (faible) ψ à l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f \quad \text{telle que} \quad \int_B \psi = 1.$$

- $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sim \frac{1}{\operatorname{dist}(\partial B)} \implies \mathcal{H}$
- $\frac{1}{\operatorname{dist}(\partial B)} \notin L^d(B)$
- $\mathbf{F}$ explose vite au bord $\implies$ unicité sans condition au bord

Equation $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$

Formulation usuelle : trouver $\psi \in H_0^1(B)$ tel que pour tout $\varphi \in H_0^1(B)$

$$\int_B \nabla\psi \cdot \nabla\varphi - \int_B \psi \mathbf{F} \cdot \nabla\varphi = \langle f, \varphi \rangle$$

- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\kappa} + \nabla V \notin L^d(B)$
- $-\operatorname{div}(M\nabla(\frac{\psi}{M})) + \operatorname{div}(\psi \boldsymbol{\kappa}) = f$
- $M = \lambda e^V$ (normalisé)

Equation $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$

Formulation adaptée : trouver $\psi \in H_M^1(B)$ tel que pour tout $\varphi \in H_M^1(B)$

$$\int_B M \nabla \frac{\psi}{M} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} - \int_B \psi \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} = \langle f, \varphi \rangle.$$

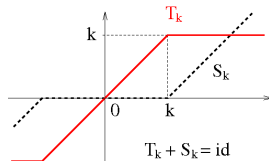
- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\kappa} + \nabla V \notin L^d(B)$
- $-\operatorname{div}(M \nabla(\frac{\psi}{M})) + \operatorname{div}(\psi \boldsymbol{\kappa}) = f$
- $M = \lambda e^V$ (normalisé)
- Non coercif

Equation $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$

Formulation adaptée : trouver $\psi \in H_M^1(B)$ tel que pour tout $\varphi \in H_M^1(B)$

$$\int_B M \nabla \frac{\psi}{M} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} - \int_B M \mathbf{T}_n\left(\frac{\psi}{M}\right) \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} = \langle f, \varphi \rangle.$$

- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\kappa} + \nabla V \notin L^d(B)$
- $-\operatorname{div}(M \nabla(\frac{\psi}{M})) + \operatorname{div}(\psi \boldsymbol{\kappa}) = f$
- $M = \lambda e^V$ (normalisé)
- Non coercif : troncature

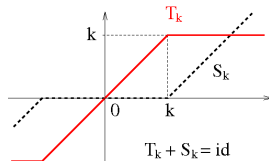


Equation $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$

Formulation adaptée : trouver $\psi \in H_M^1(B)$ tel que pour tout $\varphi \in H_M^1(B)$

$$\int_B M \nabla \frac{\psi_n}{M} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} - \int_B M T_n\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \kappa \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} = \langle f, \varphi \rangle.$$

- $\mathbf{F} = \kappa + \nabla V \notin L^d(B)$
- $-\operatorname{div}(M \nabla(\frac{\psi}{M})) + \operatorname{div}(\psi \kappa) = f$
- $M = \lambda e^V$ (normalisé)
- Non coercif : troncature



On choisit $\varphi = MS_k(\frac{\psi_n}{M})$ comme fonction test :

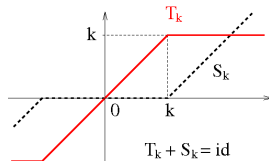
$$\|MS_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_{M,0}^1}^2 \leq |\kappa|_\infty \sqrt{\int_B \frac{|\psi_n|^2}{M}} \|MS_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_{M,0}^1} + \|f\|_{H_M^{-1}} \|MS_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_{M,0}^1}$$

Equation $-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = f$

Formulation adaptée : trouver $\psi \in H_M^1(B)$ tel que pour tout $\varphi \in H_M^1(B)$

$$\int_B M \nabla \frac{\psi_n}{M} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} - \int_B M T_n\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla \frac{\varphi}{M} = \langle f, \varphi \rangle.$$

- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\kappa} + \nabla V \notin L^d(B)$
- $-\operatorname{div}(M \nabla(\frac{\psi}{M})) + \operatorname{div}(\psi \boldsymbol{\kappa}) = f$
- $M = \lambda e^V$ (normalisé)
- Non coercif : troncature



On choisit $\varphi = MS_k(\frac{\psi_n}{M})$ comme fonction test :

$$\|MS_k(\frac{\psi_n}{M})\|_{H_{M,0}^1} \leq |\boldsymbol{\kappa}|_\infty \sqrt{\int_B \frac{|\psi_n|^2}{M}} + \|f\|_{H_M^{-1}}$$

Points clefs de la preuve d'existence

- Puisque $|\frac{\psi_n}{M}| = |T_k(\frac{\psi_n}{M}) + S_k(\frac{\psi_n}{M})| \leq k + |S_k(\frac{\psi_n}{M})|$ on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_B \frac{|\psi_n|^2}{M}} &\leq \sqrt{\int_B k^2 M} + \sqrt{\int_{\mathcal{E}_k} M \left| S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right|^2} \\ &\leq k + \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \right)^{\frac{1}{2q}} \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{L_M^{2p}} \\ &\lesssim k + A(k) \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{H_M^{1,0}} \end{aligned}$$

Points clefs de la preuve d'existence

- Puisque $|\frac{\psi_n}{M}| = |T_k(\frac{\psi_n}{M}) + S_k(\frac{\psi_n}{M})| \leq k + |S_k(\frac{\psi_n}{M})|$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_B \frac{|\psi_n|^2}{M}} &\leq \sqrt{\int_B k^2 M} + \sqrt{\int_{\mathcal{E}_k} M \left| S_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right|^2} \\ &\leq k + \left(\int_{\mathcal{E}_k} M \right)^{\frac{1}{2q}} \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{L_M^{2p}} \\ &\lesssim k + A(k) \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{H_{M,0}^1}\end{aligned}$$

- Conclusion de la preuve d'existence :

$$\begin{aligned}\left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{H_{M,0}^1} &\lesssim 1 \\ \|\psi_n\|_{H_{M,0}^1} &= \left\| MS_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) + MT_k\left(\frac{\psi_n}{M}\right) \right\|_{H_{M,0}^1} \lesssim 1\end{aligned}$$



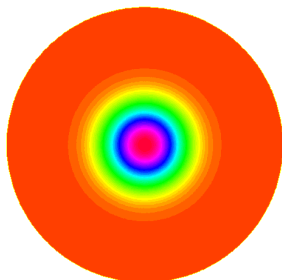
Simulation - écoulement laminaire $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$

La distribution ψ satisfait l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell)$$

où le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, Q_0) \longmapsto 2\lambda \dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - |\mathbf{Q}|^2/Q_0^2} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$



Fonction de répartition ψ sans cisaillement ($\dot{\gamma} = 0$)

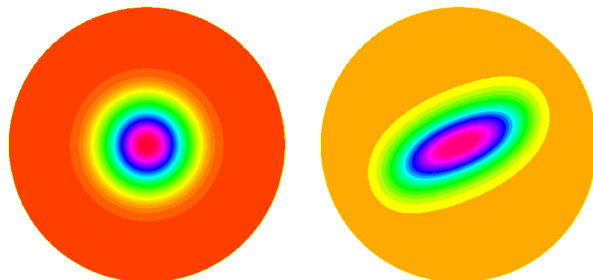
Simulation - écoulement laminaire $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$

La distribution ψ satisfait l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell)$$

où le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, Q_0) \longmapsto 2\lambda \dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - |\mathbf{Q}|^2/Q_0^2} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$



Comparatif des fonctions de répartition ($\dot{\gamma} = 0$ et $\dot{\gamma} = 0.1$)

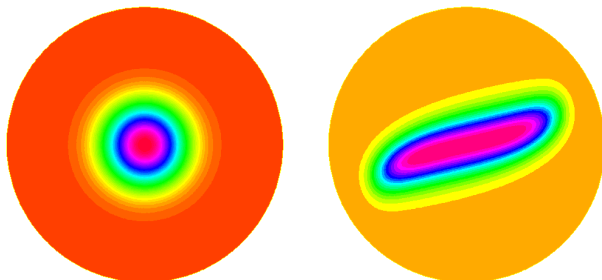
Simulation - écoulement laminaire $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$

La distribution ψ satisfait l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell)$$

où le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, Q_0) \longmapsto 2\lambda \dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - |\mathbf{Q}|^2/Q_0^2} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$



Comparatif des fonctions de répartition ($\dot{\gamma} = 0$ et $\dot{\gamma} = 0.2$)

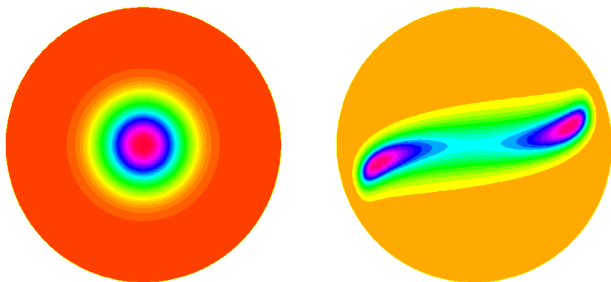
Simulation - écoulement laminaire $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$

La distribution ψ satisfait l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell)$$

où le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, Q_0) \longmapsto 2\lambda \dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - |\mathbf{Q}|^2/Q_0^2} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$



Comparatif des fonctions de répartition ($\dot{\gamma} = 0$ et $\dot{\gamma} = 0.5$)

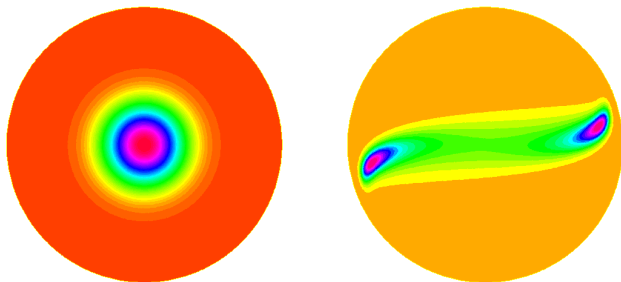
Simulation - écoulement laminaire $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\dot{\gamma} x_2, 0)$

La distribution ψ satisfait l'équation

$$-\Delta\psi + \operatorname{div}(\mathbf{F}\psi) = 0 \quad \text{sur } B(0, \ell)$$

où le champ de vecteurs $\mathbf{F}$ est donné par

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in B(0, Q_0) \longmapsto 2\lambda \dot{\gamma} \begin{pmatrix} Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1 - |\mathbf{Q}|^2/Q_0^2} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$



Comparatif des fonctions de répartition ($\dot{\gamma} = 0$ et $\dot{\gamma} = 1.0$)

Partie I - Présentation du contexte et axes de recherche

Partie II - Exemples de résultats obtenus

- 1 - Modèle d'Oldroyd en film mince
- 2 - Loi de comportement FENE en film mince
- 3 - Fluide compressible en film mince

Equation de Reynolds compressible

- Equations de Navier-Stokes compressible [Bresch, Desjardins, Gérard-Varet, Lions]

$$\mathcal{P}_\varepsilon \begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) = 0 \\ \partial_t(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon) + \nabla P(\rho_\varepsilon) = \operatorname{div}(2\mu(\rho_\varepsilon)D(\mathbf{u}_\varepsilon)) \\ \quad + \nabla(\lambda(\rho_\varepsilon)\operatorname{div}(\mathbf{u}_\varepsilon)) - r_0 \rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon| |\mathbf{u}_\varepsilon| \end{cases}$$

- Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, cas stationnaire [Marusic-Paloka, Starcevic]

$$\mathcal{P} \begin{cases} \partial_x \left(\int_0^h \rho u \right) = 0 \\ \partial_z (\mu(\rho) \partial_z u) - \partial_x P(\rho) = 0 \\ \partial_z P(\rho) = 0 \end{cases}$$

→ Pour une loi de pression monotone

$$\partial_x \left(\frac{h^3}{12} \frac{\rho P'(\rho)}{\mu(\rho)} \partial_x \rho \right) = \partial_x \left(\frac{h}{2} \rho s \right)$$

Théorème (L.C., R. Sart - 2009)

Pour $r_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, et sous des hypothèses [BD], le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ admet une solution faible **stationnaire** avec des conditions de Dirichlet **non homogènes** au bord.

Théorème (L.C., R. Sart - 2009)

La solution (stationnaire) du problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ converge vers la solution de l'équation de Reynolds compressible (stationnaire) $\mathcal{P}$ lorsque ε tend vers 0.

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{opérateur } \nabla)$$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{opérateur } \nabla)$$

$$\partial_t \nabla \varphi(\rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \varphi(\rho) + \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi(\rho) + \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad (\times 2\rho)$$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{opérateur } \nabla)$$

$$\partial_t \nabla \varphi(\rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \varphi(\rho) + \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi(\rho) + \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad (\times 2\rho)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{U}) + 2 \nabla \mathbf{u} : \nabla \mu(\rho) + 2 \rho \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad \mathbf{U} = 2 \nabla \varphi(\rho)$$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{opérateur } \nabla)$$

$$\partial_t \nabla \varphi(\rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \varphi(\rho) + \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi(\rho) + \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad (\times 2\rho)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{U}) + 2 \nabla \mathbf{u} : \nabla \mu(\rho) + 2 \rho \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad \mathbf{U} = 2 \nabla \varphi(\rho)$$

- Sommer avec l'équation de conservation du moment :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \nabla P(\rho) &= \operatorname{div}(2\mu(\rho)A(\mathbf{u})) - r_0 \rho |\mathbf{u}| |\mathbf{u}| \\ &+ \nabla((2\rho\mu'(\rho) - 2\mu(\rho) - \lambda(\rho)) \operatorname{div} \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Navier-Stokes compressible : entropie BD

- Equation de conservation de la masse : $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\times \varphi'(\rho) = \mu'(\rho)/\rho)$$

$$\partial_t \varphi(\rho) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi(\rho) + \mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{opérateur } \nabla)$$

$$\partial_t \nabla \varphi(\rho) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \varphi(\rho) + \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi(\rho) + \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad (\times 2\rho)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{U}) + 2 \nabla \mathbf{u} : \nabla \mu(\rho) + 2 \rho \nabla(\mu'(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad \mathbf{U} = 2 \nabla \varphi(\rho)$$

- Sommer avec l'équation de conservation du moment :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} + \mathbf{U})) + \nabla P(\rho) &= \operatorname{div}(2\mu(\rho)A(\mathbf{u})) - r_0 \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} \\ &+ \nabla((2\rho\mu'(\rho) - 2\mu(\rho) - \lambda(\rho))\operatorname{div} \mathbf{u}) \end{aligned}$$

- Hypothèse : $\lambda(\rho) = 2(\rho\mu'(\rho) - \mu(\rho))$

Navier-Stokes compressible : domaine borné

- Condition homogène en vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$ [Bresch, Desjardins, Gérard-Varet]
- Condition non homogène en vitesse : ~~relèvement~~ - tester contre $\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$
- Exemple de contrôle d'un terme

$$\Upsilon = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\Upsilon = - \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \leq |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2$$

Terme contrôlé (lemme de Gronwall) par

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 \right)$$

Navier-Stokes compressible : cas stationnaire

- Méthode de Lions : $\partial_t \rho \rightsquigarrow \alpha \rho$ et $\partial_t(\rho \mathbf{u}) \rightsquigarrow \alpha \rho \mathbf{u}$ puis $\alpha \rightarrow 0$.
- $\partial_t \rho$ et $\partial_t(\rho \mathbf{u})$ ne servent “que” *via* le lemme de Gronwall.
- Exemple de contrôle d'un terme

$$\Upsilon = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\Upsilon = - \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \leq \frac{r_0}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^3 + \frac{C}{r_0} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{L^\infty(\Omega)}^3 \int_{\Omega} \rho$$

Terme contrôlé par les **frottements**

$$r_0 \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^3$$



Théorème

Sous des hypothèses [BD], pour tout $r_0 > 0$, il existe une solution faible aux équations de Navier-Stokes compressible stationnaires avec conditions au bord non homogènes :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(\mathbf{u})) - r_0\rho|\mathbf{u}|\mathbf{u}$$

Théorème

Sous des hypothèses [BD], pour tout $r_0 > 0$, il existe une solution faible aux équations de Navier-Stokes compressible stationnaires avec conditions au bord non homogènes :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(\mathbf{u})) - r_0\rho|\mathbf{u}|\mathbf{u}$$

$$\partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_z(\rho_\varepsilon w_\varepsilon) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon &= 2\partial_x(\mu_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon) + \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon) \\ &\quad + \partial_x(\lambda_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_x P(\rho_\varepsilon) - r_0 \rho_\varepsilon \sqrt{u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2} u_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x(\varepsilon w_\varepsilon) + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z(\varepsilon w_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_x(\mu_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon) + \varepsilon \partial_x(\mu_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_z w_\varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(\lambda_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^3} \partial_z P(\rho_\varepsilon) - \varepsilon r_0 \rho_\varepsilon \sqrt{u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2} w_\varepsilon \end{aligned}$$

Théorème

Sous des hypothèses [BD], pour tout $r_0 > 0$, il existe une solution faible aux équations de Navier-Stokes compressible stationnaires avec conditions au bord non homogènes :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(\mathbf{u})) - r_0\rho|\mathbf{u}|\mathbf{u}$$

$$\partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_z(\rho_\varepsilon w_\varepsilon) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon &= 2\partial_x(\mu_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon) + \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon) \\ &\quad + \partial_x(\lambda_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_x P(\rho_\varepsilon) - r_0 \rho_\varepsilon \sqrt{u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2} u_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \partial_x(\varepsilon w_\varepsilon) + \rho_\varepsilon w_\varepsilon \partial_z(\varepsilon w_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_x(\mu_\varepsilon \partial_z u_\varepsilon) + \varepsilon \partial_x(\mu_\varepsilon \partial_x w_\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \partial_z(\mu_\varepsilon \partial_z w_\varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z(\lambda_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon + \partial_z w_\varepsilon)) - \frac{1}{\varepsilon^3} \partial_z P(\rho_\varepsilon) - \varepsilon r_0 \rho_\varepsilon \sqrt{u_\varepsilon^2 + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2} w_\varepsilon \end{aligned}$$

Théorème

Sous des hypothèses [BD], pour tout $r_0 > 0$, il existe une solution faible aux équations de Navier-Stokes compressible stationnaires avec conditions au bord non homogènes :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div}(2\mu(\rho)D(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}(\mathbf{u})) - r_0\rho|\mathbf{u}|\mathbf{u}$$

Théorème

Sous des hypothèses [BD], l'équation de Reynolds compressible est une approximation des équations de Navier-Stokes compressible stationnaires lorsque le domaine est mince.

$$\partial_t(\rho h) + \partial_x \left(\frac{h^3}{12} \frac{\rho P'(\rho)}{\mu(\rho)} \partial_x \rho \right) = \partial_x \left(\frac{h}{2} \rho s \right)$$

Conclusion et perspectives

① Ecoulements visco-élastiques en films minces

- Oldroyd mince + rugosités ([homogénéisation](#))
- PTT mince (influence des [non linéarités](#))



② Modèle FENE

- Existence [globale](#) en temps ou stationnaire
- FENE mince (généraliser Oldroyd mince)

③ Fluides compressibles : phénomène de cavitation

- Généralisation des résultats d'[existence](#)
- [Comparaison](#) avec d'autres modèles diphasiques minces



Conclusion et perspectives

① Ecoulements visco-élastiques en films minces

- Oldroyd mince + rugosités ([homogénéisation](#))
- PTT mince (influence des [non linéarités](#))



② Modèle FENE

- Existence [globale](#) en temps ou stationnaire
- FENE mince (généraliser Oldroyd mince)

③ Fluides compressibles : phénomène de cavitation

- Généralisation des résultats d'[existence](#)
- [Comparaison](#) avec d'autres modèles diphasiques minces



M E R C I !

- Modèle visco-élastique d'Oldroyd :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - (1-r)\eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_\varepsilon \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \\ \lambda \left(\partial_t \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\tau}_\varepsilon) \right) + f(\boldsymbol{\tau}_\varepsilon) \boldsymbol{\tau}_\varepsilon = 2\eta r D(\mathbf{u}_\varepsilon), \end{cases}$$

avec $f(\boldsymbol{\tau}_\varepsilon) = 1$

- A l'ordre principal (avec $\lambda \approx \varepsilon$) :

$$\begin{cases} -\eta(1-r) \partial_{zz}^2 u - \partial_z \beta + \nabla_x p = 0 \\ \partial_z p = 0 \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0 \end{cases}$$

avec $\beta = \frac{\eta r \partial_z u}{1 + C^2 |\partial_z u|^2}$

[Retour](#)

- Modèle visco-élastique de Phan-Thien et Tanner :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - (1-r)\eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_\varepsilon \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \\ \lambda \left(\partial_t \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_\varepsilon + \mathbf{g}(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\tau}_\varepsilon) \right) + f(\boldsymbol{\tau}_\varepsilon) \boldsymbol{\tau}_\varepsilon = 2\eta r D(\mathbf{u}_\varepsilon), \end{cases}$$

avec $f(\boldsymbol{\tau}_\varepsilon) = 1 + \alpha \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\tau}_\varepsilon)$

- A l'ordre principal (avec $\lambda \approx \varepsilon$) :

$$\begin{cases} -\eta(1-r) \partial_{zz}^2 u - \partial_z \beta + \nabla_x p = 0 \\ \partial_z p = 0 \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0 \end{cases}$$

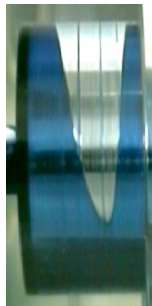
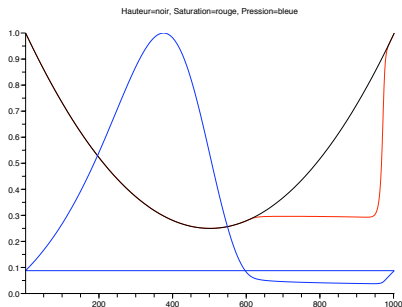
avec $\beta = F(\partial_z u)$

[Retour](#)

Phénomène de cavitation

- Densité : $\rho(\varphi) = \varphi\rho_\ell + (1 - \varphi)\rho_v$ et viscosité : $\frac{1}{\eta(\varphi)} = \frac{\varphi}{\eta_\ell} + \frac{1 - \varphi}{\eta_v}$
- Pression du mélange

$$P(\varphi) = P_{\text{sat}} + P_{v\ell} \log \left(\frac{\rho_v c_v^2 (\varphi\rho_\ell + (1 - \varphi)\rho_v)}{\rho_\ell (\varphi\rho_v c_v^2 + (1 - \varphi)\rho_\ell c_\ell^2)} \right)$$



Retour